

Solución al C a m p o de Onda Multirrayo

Por Ing. Juan Carlos García Domínguez, Profesor Auxiliar, Instituto Técnico Militar José Martí
sarayb@inel.une.cu

Introducción

Una de las mayores fuentes de error es el efecto de las ondas de interferencia causadas por la propagación multirrayectoria o la presencia de varias transmisiones que no pueden ser separadas de la señal de interés. Para resolver el efecto adverso de las ondas de interferencia, una variante de solución ha sido la descomposición del campo de ondas en los componentes que lo constituyen y determinar el ángulo de arribo de cada frente de onda por separado, mediante el empleo del espectro angular a través de los llamados Algoritmos de Súper Resolución (ASR).

En la actualidad, el término súper resolución o alta resolución es ampliamente empleado en lugar de los términos “análisis del frente de onda” y “resolución de multicomponentes del campo de ondas”. Los ASR son técnicas de procesamiento de señales que pueden ser aplicadas en diferentes campos como: radioastronomía, radar, sonar, sismología, comunicaciones, radiogoniometría, etc. [1,2].

Existen algoritmos que son más eficientes en un campo que en otros, en dependencia del objetivo para el

cual fueron diseñados, o por las exigencias que debe cumplir para su empleo.

Este trabajo tiene el objetivo de analizar las características fundamentales de los ASR más empleados, de forma que puedan ser identificadas las posibles ventajas o desventajas —según la finalidad que se persiga— con el empleo de algunos de ellos. La base fundamental para desarrollarlo ha sido una síntesis del modelo matemático que los describe y se tomó como referencia la Matriz de Covarianza Espacial (MCE) para clasificarlos.

Modelo de los datos en el sensor

Para dar solución al campo de ondas multirrayo producto de la propagación multirrayectoria mediante los ASR, las fuentes deben encontrarse lo suficientemente lejanas para poder considerar sus frentes de onda como un plano. Los algoritmos se basan en las diferencias de fase entre sensores de un sistema de antenas, debido a los tiempos de retardo dados por la propagación del frente de onda, que vienen con determinado ADA —Ángulo de Arribo—, y de la posición geométrica que ocupe cada sensor en el terreno, distribuidos según un sistema de coordenadas, donde es tomado un sensor como referencia del sistema.

Por lo tanto, en caso de que arriben N , $n=1, \dots, N$ frentes de onda a los M , $m=1, \dots, M$ sensores del sistema, el campo inducido en el sensor m en el instante t puede ser representado por:

$$m_{(t)} = \sum_{n=1}^N a(\alpha)_{mn} f_{n(t)} + w_{m(t)} \quad 1$$

donde:

$m_{(t)}$: vector que representa el campo inducido en el sensor m en el instante t .

$\mathbf{a}(\alpha)_{mn}$: vector de enfoque que representa la fase de la señal n en el sensor m respecto a la fase de la señal en el sensor de referencia, este último generalmente en las coordenadas 0,0,0.

$f_{n(t)}$: vector de fuentes que representa la amplitud y fase del rayo n en el sensor de referencia en el instante t .

$w_{m(t)}$: ruido presente en el sensor m en el instante t .

De la ecuación 1 se obtienen las matrices:

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_M \end{bmatrix}_{(t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{(\alpha)11} & \dots & \mathbf{a}_{(\alpha)1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{(\alpha)M1} & \dots & \mathbf{a}_{(\alpha)MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}_{(t)} + \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_M \end{bmatrix}_{(t)} \quad 2$$

o también:

$$M_{(t)} = AF_{(t)} + W_{(t)} \quad 3$$

Siendo $M_{(t)}$ la representación vectorial del campo de ondas en cada sensor en el instante de tiempo t , a este vector también se le conoce como instante del sistema de antenas —array snapshot—. En las expresiones 2 y 3 la matriz de vectores de enfoque no depende de los instantes del sistema, sino de las coordenadas del sensor en el terreno y de los ADA de cada frente de onda, con una dimensión de $M \times N$.

ASR como solución a los campos de onda multirrayos

En la práctica sólo existe la posibilidad de acceso a la matriz $M_{(t)}$. Basado en 2, algunos de los ASR emplean la Matriz de Covarianza Espacial (MCE) de dimensión $M \times M$ para conformar su estimador y determinar los ADA [2,6]. La MCE viene dada por:

$$R = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T M_{(t)} M_{(t)}^H \quad 4$$

donde:

T : cantidad de instantes del sistema de antenas.

El superíndice H en el segundo término de la sumatoria indica la transpuesta compleja conjugada.

ASR que emplean directamente la MCE

Estos algoritmos explotan la propiedad de ortogonalidad que existe entre los vectores de enfoque y los vectores de ruido presentes en la MCE, cuestión esta mejor explicada en el punto siguiente. La cantidad máxima de ADA será de $M-1$, además, al igual que la mayoría de los ASR, presentan dificultades para estimar los ADA de señales coherentes.

Método de Máxima Probabilidad —Maximum Likelihood Method (MLM)—.

$$P_{MLM(\alpha)} = \frac{1}{\mathbf{a}_{(\alpha)}^H R^{-1} \mathbf{a}_{(\alpha)}} \quad 5$$

Algoritmo de Ruido Térmico —Thermal Noise Algorithm (TNA)—.

$$P_{TNA(\alpha)} = \frac{1}{\mathbf{a}_{(\alpha)}^H R^{-2} \mathbf{a}_{(\alpha)}} \quad 6$$

Respuesta Angular Adaptativa —Adaptative Angular Response (AAR)—.

$$P_{AAR(\alpha)} = \frac{\mathbf{a}_{(\alpha)}^H R^{-1} \mathbf{a}_{(\alpha)}}{\mathbf{a}_{(\alpha)}^H R^{-2} \mathbf{a}_{(\alpha)}} \quad 7$$

Estos métodos estiman los ADA mediante la exploración espacial a través del vector de enfoque, donde se encuentren los máximos de la curva estarán los ADA. El ASR de la expresión 7 se destaca como el de mayor resolución dentro de los de este tipo [1,8,9].

Estos métodos tienen menor resolución que el resto, lo cual es su desventaja fundamental. Sin embargo, tienen varias ventajas, primero, que pueden emplearse en un sistema de antenas con cualquier tipo de configuración —plana, lineal uniforme, lineal no uniforme—; y segundo, no necesitan descomponer la MCE en subespacios.

ASR que emplean la descomposición de la MCE

Estos métodos consideran un espacio vectorial de dimensión M , con un Subespacio de Señal (SES) de dimensión N y un Subespacio de Ruido (SER) de dimensión $M-N$. Para hallar estos subespacios se realiza la descomposición de la MCE mediante el cálculo de los valores y vectores propios de la expresión 4 de manera que:

$$Rv = \lambda v \quad 8$$

donde:

v : vectores propios de R

λ : valores propios de R

Los valores propios son ordenados para que:

$$\lambda_i \geq \lambda_{i-1} \geq \dots \geq \lambda_1 \quad 9$$

Como a cada valor propio le corresponde un vector propio, estos también son ordenados, entonces:

$$[v_i, v_{i-1}, \dots, v_1] \quad 10$$

En condiciones ideales —sin presencia de ruido— la MCE sería de rango N y, por lo tanto, $M-N$ vectores propios corresponderían a valores propios igual a cero y serían ortogonales a todos los vectores de enfoque de los N rayos.

En condiciones reales —con presencia de ruido— los valores propios de menor valor, pertenecientes al SER, no son cero; por lo tanto, es necesario establecer un umbral que permita separar a ambos subespacios a través del conocimiento de la cantidad de rayos que hay presentes .

Para el establecimiento de dicho umbral existen varios criterios basados en una relación logarítmica entre la media geométrica y la media aritmética expresada en la forma siguiente [2]:

$$C_{(n)} = T \log \left[\frac{\left[\frac{1}{(M-n)} \sum_{i=n+1}^M \lambda_i \right]^{M-n}}{\prod_{i=n+1}^M \lambda_i} \right] + P_{(n)} \quad 11$$

Descripción de mínima longitud:

$$P_{(n)} = \frac{1}{2} \log(T) [n(2M-n)] \quad 12$$

Criterio de información de Akaike:

$$P(n) = [n(2M-n)] \quad 13$$

Hannan y Quinn:

$$P_{(n)} = \frac{1}{2} \log[\log(T)][n(2M-n)] \quad 14$$

Luego, la estimación del número de rayos se realiza sobre la base de la aproximación logarítmica de la expresión 11 y los criterios de 12, 13 y 14. La n que minimiza la expresión 11, indicará el número de rayos presentes en el escenario, teniendo en cuenta que, $n = 0, 1, \dots, M-1$.

Según la literatura especializada, el criterio más exacto es el de la expresión 12 [1,4,7].

Algunos de los ASR de este tipo son:

Clasificación de Múltiples Señales —Multiple Signal Classification (MUSIC)—

Este ASR trabaja con el SER, por lo tanto, mediante uno de los criterios de la expresión 11 se toman los vectores propios que pertenecen a este subespacio, y queda:

$$R_{SER} = [v_{N+1}, \dots, v_M]_{M \times (M-N)} \quad 15$$

Si se tiene en cuenta la propiedad de que todos los vectores del SER son ortogonales a los vectores de enfoque de los frentes de onda (rayos), se construye el estimador MUSIC, representados los ADA por los máximos de la curva producto de la exploración mediante el vector de enfoque. La cantidad máxima de ADA que puede estimar es de $M-1$, pues al menos debe existir un vector propio en el SER [3,4,5].

$$PMUSIC(\alpha) = \frac{1}{\mathbf{a}_{(\alpha)}^H R_{SER} R_{SER}^H \mathbf{a}_{(\alpha)}} \quad 16$$

Smooth-MUSIC

Los métodos anteriores se encuentran limitados con la presencia de señales coherentes, con este ASR se trata de superar esta dificultad. Los M elementos del sistema de sensores se subdividen en L subsistemas solapados, cada uno con P elementos. Por lo tanto:

$$L = M - P + 1 \quad 17$$

Al emplear los datos de cada subsistema L , se realiza una matriz de covarianza de dimensión $P \times P$, luego la MCE R_L .

$$R_L = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} R_l \quad 18$$

Se sigue con los pasos anteriores a partir de la expresión 11. Esta formulación permite detectar hasta $L-1$ señales correlacionadas.

Estimador de Jhonson

Es un mejoramiento del Método de Máxima Probabilidad donde se elimina el SES en el denominador de la expresión 5, lo que elimina la desventaja del método de esa expresión. Se reporta como un ASR más robusto que MUSIC en cuanto a errores debidos a la calibración y con una resolución completamente similar. También está limitado por las señales coherentes [7].

$$JH_{(\alpha)} = \frac{1}{\sum_{i=n+1}^M \lambda_i^{-1} \left| \mathbf{a}_{(\alpha)}^H \mathbf{v}_i \right|^2} \quad 19$$

La expresión 19 es muy similar a la 16, con la diferencia de que el Estimador Jhonson posee en el SER del denominador los valores propios de este subespacio.

Para encontrar un método que estimara los ADA sin necesidad de realizar una exploración espacial a través del vector de enfoque, la solución llevó a complicar el sistema de antenas al estar constituido este por pares de sensores gemelos que forman un elemento del sistema, de cada uno de los subsistemas X y Y, como se muestra en la figura 1, para un sistema lineal uniforme y, en la figura 2, para un sistema de pares idénticos distribuidos sobre el terreno.

Total de Mínimos Cuadrados-Estimación de los Parámetros de la Señal con el empleo de la Técnica de Invarianza Rotacional —Total Least Squares-Estimation of Signal Parameters using Rotational Invariance Technique (TLS-ESPRIT)—

Esta técnica se basa en las diferencias de fase que existe en cada par de sensores, que puede ser con invarianza simple como en las figuras 1 y 2 o con invarianza múltiple.

Debido a la configuración del sistema de sensores, el subsistema X se mantiene como en la expresión 3; pero al subsistema Y se le agrega una matriz diagonal, y el modelo queda:

$$X_{(t)} = AF_{(t)} + W_{x(t)} \quad 20$$

$$Y_{(t)} = A\phi F_{(t)} + W_{y(t)} \quad 21$$

donde:

ϕ : matriz diagonal de dimensión $M \times M$ que contiene las diferencias de fase entre los subsistemas X y Y. En ella están contenidos los vectores de enfoque.

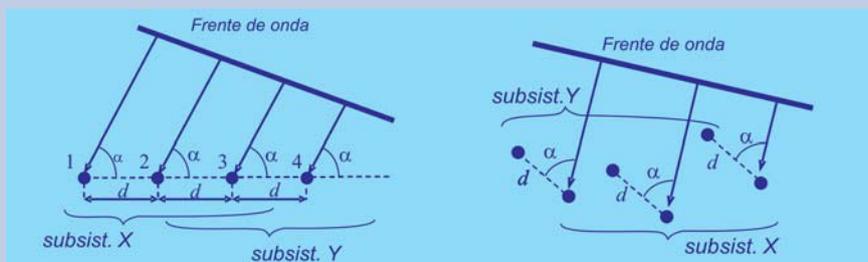


Figura 1 Sistema lineal uniforme

Figura 2 Sistema de pares idénticos

La instantánea del sistema está compuesta por:

$$Z_{(t)} = \begin{bmatrix} X_{(t)} \\ Y_{(t)} \end{bmatrix} \quad 22$$

Este ASR trabaja con el SES, por lo tanto, se halla la MCE al sustituir los miembros de la sumatoria de 4 por $Z_{(t)}$. Al aplicar la expresión 11, se obtiene el SES.

$$R_{SES} = \begin{bmatrix} R_{SES}(x) \\ R_{SES}(y) \end{bmatrix}_{(2M) \times N} \quad 23$$

Con el objetivo de obtener los vectores de enfoque, se hace la descomposición de la expresión 23 en valores singulares.

$$R_{SES} = USV^H \quad 24$$

Se divide V en submatrices de dimensión $(M \times M)$:

$$V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}_{(2M) \times (2M)} \quad 25$$

$$\Psi = -V_{12} V_{22}^{-1} \quad 26$$

Cada valor propio de Ψ representa la información de una señal. El estimador de TLS-ASPRIT es un estimador directo, sin la exploración del espacio a través del vector de enfoque, y queda como la siguiente expresión:

$$TLS-ESPRIT_{(\omega)} = \cos^{-1} \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(\lambda_{\psi(i)}) \right] \quad 27$$

donde:

λ : longitud de onda.

Este método tiene añadida una carga de mayor complejidad, debido a la estimación de Ψ además de exigir una determinada geometría del sistema de sensores, pero evita la exploración del espacio a través del vector de enfoque que, en dependencia de la resolución que se emplee, implica una carga de cálculos.

Estos tipos de algoritmos son de los de mayor resolución, su desarrollo es excelente cuando se conoce *a priori* la cantidad de rayos presentes, de lo contrario hay que estimarlos mediante uno de los criterios ya expuestos. Su mayor desventaja radica en lograr una exactitud en la estimación de los subespacios. Para el caso de dos fuentes el primer valor propio de la ecuación 4 crece con la potencia de ambas fuentes; pero el segundo decrece en la medida que estén más próximas estas fuentes, si una es más débil que la otra se hace aún más difícil. Si al efecto de cambios en los valores propios se añaden problemas de calibración o bajo número de T en 4, la determinación de los subespacios es casi imposible y de ellos depende la veracidad de los métodos.

ASR que no emplean MCE

Los métodos anteriores dependen de la expresión 4. La estimación de esta es una carga de cálculos. Se asume que todas las instantáneas del sistema siguen la misma estadística, es decir, los datos son homogéneos, en un medio en que las pérdidas cambian rápidamente, estos modelos pueden no ser validos [7,8,9].

Esto motivó el desarrollo de técnicas no estadísticas o dominio directo de los datos —*direct data domain, D³*— conocidas como “*matriz pencil*”.

Es importante destacar que este método tiene mucha similitud con ESPRIT, pero sin la estimación de la MCE.

Comienza con la definición de dos matrices X_1 y X_2 con dimensión $(N-L) \times L$, siendo L el parámetro *pencil*.

$$X_1 = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_{L-1} \\ m_2 & m_3 & \dots & m_L \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M-L+1} & m_{M-L} & \dots & m_{M-1} \end{bmatrix} \quad X_2 = \begin{bmatrix} m_2 & m_3 & \dots & m_L \\ m_3 & m_4 & \dots & m_{L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{M-L} & m_{M-L+1} & \dots & m_M \end{bmatrix} \quad 28$$

$$N \leq L \leq M-L ; \text{ para } M \text{ par} \quad 29$$

$$N \leq L \leq M+L+1 ; \text{ para } M \text{ impar} \quad 30$$

X_1 y X_2 se corresponden con las expresiones 20 y 21, donde la matriz diagonal Ψ es la que debe estimarse. Esto implica que los valores

propios generalizados ($\lambda_{MP(i)}$) del par de matrices $[X_1, X_2]$ son los vectores de enfoque. Por lo tanto, el estimador sería:

$$MP_{(\alpha)} = \cos^{-1} \left[\frac{\lambda}{2\pi d} \arg(\lambda_{MP(i)}) \right] \quad 31$$

La cantidad máxima de ADA que este método puede determinar está más limitada que en los casos anteriores. Según la cantidad de sensores es:

$$N \leq \frac{M}{2}; \text{ para el caso de } M \text{ par.} \quad 32$$

$$N \leq \frac{(M+1)}{2}; \text{ para el caso de } M \text{ impar.} \quad 33$$

En sentido general la calidad en la estimación de los ADA y de la resolución es proporcional a la cantidad de sensores que se empleen para conformar el sistema, esto es válido para todos los algoritmos, pero en este método es fundamental.

Conclusiones

Existen otras variantes no expuestas en el trabajo como el Root-MUSIC, Cyclic-MUSIC, ESPRIT, Cyclic-ESPRIT, Unitary-ESPRIT, etc. De forma general, todas sacrifican algo para obtener otra ventaja, por ejemplo, las que trabajan con cualquier sistema de sensores, sin el problema de los subespacios, tienen menos resolución. Si se quiere aumentar la resolución con cualquier tipo de sistema de sensores aparece el problema de los subespacios. Si se elimina la carga de cálculos debido a la exploración mediante el vector de enfoque, aparecen las exigencias para los sistemas de sensores y continúan los subespacios. Si se elimina la carga de cálculo por la exploración y por la MCE, son necesarios más sensores para estimar la misma cantidad de ADA y continúan las exigencias al sistema de sensores. Por este motivo es importante conocer las características de los ASR, específicamente el modelo matemático, debido a que es la única forma de saber, a partir de las posibilidades con que se cuenta y los objetivos que se pretenden alcanzar, cuál sería el ASR más propicio o qué sería necesario variar para la implementación de alguno de ellos. 

Referencias bibliográficas

- [1] Gething, P.T.D. *Radio direction finding and superresolution*. Stevenage, England: Piter Peregrinus, 1991, pp. 39-57.
- [2] Anderson, Henry W. "Super-resolution Direction-finding Applications and Implementation Results". *Journal of Electronic Defense*, (enero 1995): 63-65.
- [3] Johson, Richard L. "An Experimental Investigation of Three Eigen DF Techniques". *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, no. 3, (julio 1992): 852-860.
- [4] Schmidt, Ralph O. "Múltiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 3, (marzo/1986): 276-280.
- [5] Schmidt, Ralph O. and Franks, Raymond E. "Multiple Source DF Signal Processing: an experimental System". *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. AP-34, no. 3, (marzo 1986): 281-290.
- [6] Kafedziski, Venceslav. *Direction Finding*. Part 2: "Array Signal Processing, Errors, Location Calculation. Disponible en: www.dtk.gov.mk/admin/Portal/Linkklik. (Consulta: febrero/2004).
- [7] Lagunas, Miguel A. "Estimación de ángulo de llegada". Disponible en: www.cttc.es/docs/CapIII-DOA.pdf. (Consulta: mayo/2003).
- [8] Nidu, Prabhakar S: *Sensor array Signal Processing*. London: CRC Press LLC, 2001.
- [9] Gonzalvo, Xavier. "Detección del ángulo de llegada con ESPRIT". Disponible en: www.salleurl.edu/~st06375/personal.php. (Consulta: febrero/2004).